

Date de création : 29/06/2020  
De : Ric  
Document : mathématiques et jonglage  
Version : 1.03

Siteswap.....	2
Notions.....	2
Validité.....	3
Hauteur des lancers du jongleur.....	5
Equations.....	5
Application.....	6
Références.....	6

# Siteswap

## Notions

Contexte : Dans les années 1980, des scientifiques passionnés de jonglage, recherchent, chacun de leur côté, et trouvent la façon d'écrire des figures de jonglage, un peu comme le solfège pour la musique. Cette notation consiste à décrire les figures de jonglage par une séquence de chiffres. Le terme siteswap est créé à cette occasion pour nommer cette notation

Exemples de séquences siteswap décrivant des figures de jonglage d'objets (balles, massues, anneaux, ...) : 3, 5, 51, 534, 633

On se place dans la configuration de base suivante :

- les lancers sont asynchrones (les lancers se font alternativement main droite (D) puis main gauche (G))
- les lancers sont réguliers (l'intervalle de temps entre deux lancers consécutifs est constant)
- un seul objet est lancé à la fois

Principe : la répétition de la séquence siteswap décrit alternativement les lancers D et G, chaque chiffre indique le nombre de lancers à prévoir avant que l'objet soit lancé de nouveau. Les chiffres utilisés sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, ...

Exemple 1 : séquence siteswap 3 (3 objets, voir les règles de validité pour comprendre pourquoi) En fait le jongleur reproduit la série 33333333... où chaque main lance un objet qui sera de nouveau lancé par l'autre main après 3 lancers. Si on note (A) un objet, on obtient le déroulé des lancers suivant :

3 (A ↑)	3	3	3 (A ↑)	3	3	3 (A ↑)	3	3	...
D	G	D	G	D	G	D	G	D	...

Cette figure nommée cascade est la porte d'entrée dans le monde du jonglage. Quelques heures permettent de la mettre en place

Conventions :

0 correspondrait à un lancer sans balle. En fait la main est vide

1 correspond à un changement de main, l'objet est lancé directement dans l'autre main horizontalement

2 correspond à une conservation de la balle dans la main

Notation : on note p la période de la séquence siteswap (nombre de chiffres composant la séquence)

Exemple 2 : séquence siteswap 31 (2 objets) de période 2

En fait le jongleur reproduit la série 3131313131...

On note (A) (B) les objets

Départ : (A) dans D et (B) dans G

On obtient le déroulé des lancers suivant :

3 (A ↑)	1 (B →)	3 (B ↑)	1 (A →)	3 (A ↑)	1 (B →)	3 (B ↑)	1 (A →)	3 (A ↑)	...
D	G	D	G	D	G	D	G	D	...

Dans cette figure, nommée douche, chaque main à un rôle différent, l'une lance vers le haut, l'autre effectue un changement de main. Sans surprise, les droitiers utiliseront plutôt D pour lancer vers le haut ce qui est représenté dans le tableau

Exemple 3 : séquence siteswap 50505 (3 objets) de période 5

En fait le jongleur reproduit la série 505055050550505...

On note (A) (B) (C) les objets

Départ : (A) (B) et (C) dans D et G vide

On obtient le déroulé des lancers suivant :

5 (A ↑)	0	5 (B ↑)	0	5 (C ↑)	5 (A ↑)	0	5 (B ↑)	0	5 (C ↑)	...
D	G vide	D	G vide	D	G	D vide	G	D vide	G	...

Dans cette figure, nommée judicieusement snake, les balles se suivent en étant toutes lancées d'une main puis de l'autre

Exemple 4 : séquence siteswap 40 (2 objets) de période 2

En fait le jongleur reproduit la série 4040404040...

On note (A) (B) les objets

Départ : (A) et (B) dans D

On obtient le déroulé des lancers suivant :

4 (A ↑)	0	4 (B ↑)	0	4 (A ↑)	0	4 (B ↑)	0	4 (A ↑)	...
D	G vide	D	G vide	D	G vide	D	G vide	D	...

Dans cette figure, on ne jongle qu'avec D.

En reproduisant ce schéma avec les deux mains, on obtient la figure nommée fontaine, de séquence siteswap 4 qui est la figure de base du jonglage à quatre objets. Dans ce cas, prévoir plusieurs jours pour la mettre en place

Remarques :

- un chiffre impair dans une séquence siteswap indique que l'objet sera attrapé par l'autre main
- un chiffre pair dans une séquence siteswap indique que l'objet retombe dans la même main
- si la période est impaire (3, 4, 5, 531, ...), la figure est symétrique et les mains reproduisent les mêmes lancers périodiquement
- si la période est paire (31, 51, 7333, ...), la figure n'est pas symétrique et les mains ne reproduisent pas les mêmes lancers. Le défi est alors d'inverser le rôle des mains

Limitation : la notation siteswap ne décrit pas la façon de lancer ou de recevoir les balles (intérieur ou extérieur, bras croisés, dans le dos, sous la jambe, au dessus de la tête, patte de chat, en pingouin, avec la paume ou avec le dos de la main, pirouettes, rotation de l'objet, ...)

## Validité

Règles à vérifier pour assurer la validité d'une séquence siteswap

Règle 1 : la moyenne des chiffres constituant la séquence doit être une valeur entière. Elle correspond au nombre d'objets

Règle 2 : Soit  $p$  la période d'une séquence

- on ajoute (dans l'ordre) les valeurs 0, 1, 2, ...,  $p-1$  aux chiffres de la séquence
- on remplace ces sommes par le reste de la division par  $p$

La nouvelle séquence obtenue doit être une permutation de 0, 1, 2, ...,  $p-1$ . Cette règle assure qu'une main réceptionne au plus un objet

Exemple 1 : 554

INVALIDE : Règle 1 non respectée,  $(5+5+4)/3$  n'est pas un entier

Exemple 2 : 552

VALIDE

Règle 1 indique qu'il y a 4 objets

Règle 2 :

552

012

somme :  $5+0, 5+1, 2+2 = 5, 6, 4$

nouvelle séquence après détermination des restes (division euclidienne par  $p = 3$ ) : 2, 0, 1 . C'est bien une permutation de 0, 1, 2

Exemple 3 : 924

INVALIDE

Règle 1 indique qu'il y a 5 objets

Règle 2 :

924

012

somme :  $9+0, 2+1, 4+2 = 9, 3, 6$

nouvelle séquence après détermination des restes (division euclidienne par  $p = 3$ ) : 0, 0, 0 . Ce n'est pas une permutation de 0, 1, 2

Exemple 4 : 23456

VALIDE

Règle 1 indique qu'il y a 4 objets

Règle 2 :

23456

01234

somme :  $2+0, 3+1, 4+2, 5+3, 6+4 = 2, 4, 6, 8, 10$

nouvelle séquence après détermination des restes (division euclidienne par  $p = 5$ ) : 2, 4, 1, 3, 0 . C'est bien une permutation de 0, 1, 2, 3, 4

Exemple 5 : 423

VALIDE

Règle 1 indique qu'il y a 3 objets

Règle 2 :

423

012

somme :  $4+0, 2+1, 3+2 = 4, 3, 5$

nouvelle séquence après détermination des restes (division euclidienne par  $p = 3$ ) : 1, 0, 2 . C'est bien une permutation de 0, 1, 2

Dans ce cas, le jongleur reproduit la série 423423423... . Si on note (A) (B) (C) les objets, on obtient le déroulé des lancers suivant :

4 (A ↑)	2 (B ↑)	3 (C ↑)	4 (B ↑)	2 (A ↑)	3 (C ↑)	4 (A ↑)	2 (B ↑)	3 (C ↑)	...
D	G	D	G	D	G	D	G	D	...

Exemple 6 : 432

INVALIDE

Règle 1 indique qu'il y a 3 objets

Règle 2 :

432

012

somme :  $4+0, 3+1, 2+2 = 4, 4, 4$

nouvelle séquence après détermination des restes (division euclidienne par  $p = 3$ ) : 1, 1, 1 . Ce n'est pas une permutation de 0, 1, 2

Dans ce cas, le jongleur devrait reproduire la série 432432432...

On note (A) (B) (C) les objets

Départ : (A) et (C) dans D et (B) dans G

On obtient le déroulé des lancers ( $\uparrow$ ) et des réceptions ( $\downarrow$ ) suivant :

4 (A $\uparrow$ )	3 (B $\uparrow$ )	2 (C $\uparrow$ ), en fait (C) est conservé	4 : Aucune réception	(A $\downarrow$ ) (B $\downarrow$ ) (C $\downarrow$ ) : Collision fatale !! 3 impossible
D	G	D	G	D

Remarque :

- on peut ajouter ou retrancher (si le chiffre résultant est positif ou nul) la période d'une séquence siteswap à tout chiffre de la séquence et obtenir une nouvelle séquence valide

Exemple : on peut passer de 33 à 53 ou 31

## Hauteur des lancers du jongleur

### Equations

Relation 1 : Théorème de Claude Shannon

$$\frac{f+d}{v+d} = \frac{B}{H}$$

les lettres f, d, v, H, B désignent :

- f : le temps qu'une balle passe en l'air
- d : le temps qu'une balle passe dans la main
- v : le temps qu'une main reste vide
- H : le nombre de mains utilisées pour jongler
- B : nombre de balles

valeurs usuelles lors du jonglage de balles :

$$\frac{50}{100}d \leq v \leq \frac{70}{100}d$$

$$v \approx 0.2s$$

$$d \approx 0.3s$$

Les valeurs de v et d sont propres à chaque jongleur

Relation 2 : application de l'étude de la chute des corps

h : hauteur d'un lancer

g : pesanteur

$$h = \frac{g}{8}f^2 \quad \text{d'où} \quad h = \frac{g}{8}\left((v+d)\frac{B}{H} - d\right)^2$$

Valeur de la pesanteur g en  $m/s^2$  dans notre système solaire :

- lune : 1.62

- mars : 3.71

- venus : 8.87

- Terre : 9.81
- Jupiter : 24.79

## Application

Il n'est pas simple de déterminer directement  $v$  et  $d$ . Cependant, on peut essayer d'avoir une idée de ces valeurs en les déduisant des hauteurs  $h_1$  ( $B=3$  et  $H=2$ ) et  $h_2$  ( $B=4$  et  $H=2$ ).

Mode opératoire possible :

- jongler dans les deux cas en respectant le rythme imposé par un métronome et face à une paroi verticale afin de cartographier les trajectoires
- repérer la position du centre de gravité d'une balle lorsqu'elle quitte la main et lorsqu'elle est au sommet de sa trajectoire
- en déduire les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$ . Pour  $h_2$ , on peut tricher en jonglant avec 2 balles d'une main mais divisant le tempo par deux
- vérifier que l'on est bien dans le cas :  $4h_1 \geq h_2$  et  $9h_2 \geq 16h_1$

$$\text{on pose : } A = \sqrt{\frac{8h_1}{g}} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\frac{8h_2}{g}}$$

$$\text{on a : } v = 2A - B \quad \text{et} \quad d = 3B - 4A$$

- faire un tableau donnant  $h$  pour  $B = 4$  à 15 (l'être humain ne peut pas espérer mieux selon les spécialistes)

Voici le tableau pour  $v = 0.2$  s ,  $d = 0.3$  s ,  $H = 2$  et  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>

$$h = \frac{9.81}{8} (0.25B - 0.3)^2$$

B	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h (m)	0.25	0.60	1.11	1.77	2.58	3.54	4.66	5.94	7.36	8.94	10.67	12.56	14.60

Voici un tableau que j'ai réalisé avec un métronome réglé à 200 pulsations par minute  
 $h_1 = 0.404$  m ,  $h_2 = 0.918$  m ,  $H = 2$  et  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>

On obtient :

$$v \approx 0.28 \text{ s}$$

$$d \approx 0.30 \text{ s}$$

B	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h (m)	$h_1$	$h_2$	1.64	2.57	3.71	5.05	6.61	8.37	10.34	12.52	14.91	17.50	20.30

Et le votre ?

## Références

- the encyclopædia of ball juggling (Charlie Dancey)
- les études sur le jonglage de Claude Shanon ("Scientific Aspects of Juggling")